

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2014/2015 учебном году**

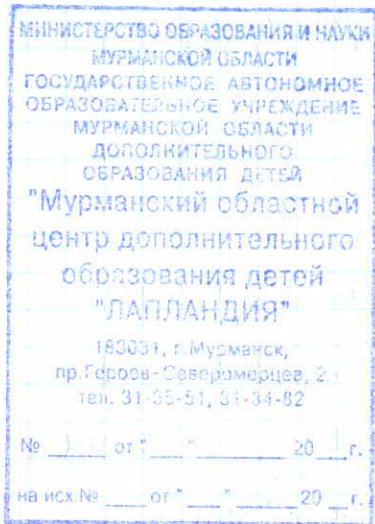
Мурманская область

Шифр участника: М-09-05, М2-09-04

Класс: 09

Количество баллов: 28

Результат участия: призер



Задача 9.1.

Поскольку все числа на
карточках различны,
найдем одно самое
большее число $\Rightarrow$ оно
будет больше любого
из соседних $\Rightarrow$ из соседей

1	0	5
3	0	5
2	1	2
1	1	2

за своим числом для один раз
(также при первом выемании
имеет значение правду, что не можем
быть).

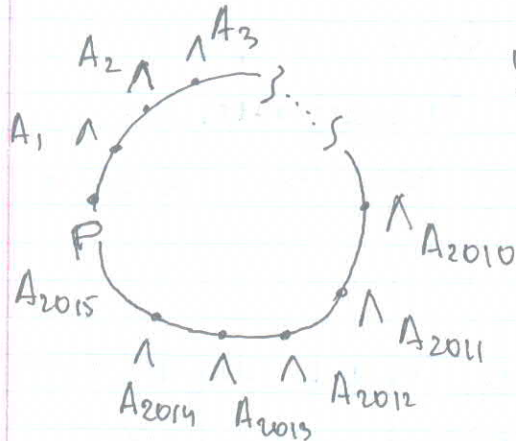
Также, поскольку все числа различны,
то найдем одно самое маленькое,
которое меньше любого из соседних $\Rightarrow$
при втором выемании число для
один имеет противоположные.

(При втором выемании все разряды
молчат, т.к. они говорят, что
у них больше число, чем у соседей).

А второе высказывание противоречит
1-му.)

Отсюда наиб. $K = 2013$

Достигаемо оно, если за столом
один рыцарь, который молчит при
втором высказывании; и все с наимень-
шим числом также молчит.



Упорядочим $A_1 < A_2 < \dots$
 $< A_{2015}$

Наибольшее число
 A_{2015} - у рыцаря.

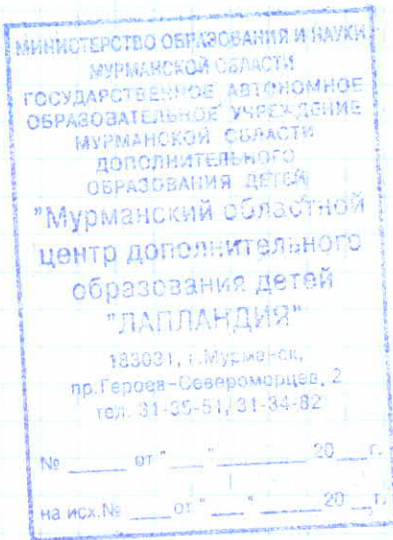
При таком расположении

1 Высказывание:

рыцарь говорит правду $A_{2015} > A_1$; A_{2014}
и все молчит: каждое число
меньше одного из соседних.

2 Высказывание:

2013 человек молчит, т.е. у



нашего из них
число больше одного
всего.

Ответ: К наиб = 2013.

Задача 9.2.

Пусть S - сумма

цифр n -ного натурального

числа.

Поскольку как минимум 2 из 5
порядковых чисел ^{натуральных} чётные, то
и ~~все~~ из как минимум 2 из 5 S
- чётные (у чётных чисел не обязательно
чётные S).

Из чётных чисел только 2 - простое $\Rightarrow$
чтобы все 5 порядковых nat.
чисел были простыми, $\&$ сумма
цифр хотя бы двух из них $= 2$.

Число, у которого $S=2$ ~~можно получить~~
из ~~числа~~ ~~а~~ вида: имеет вид:

$$a = 10^k + 1; \text{ где } k - \text{целое неотриц.}$$

$$\text{или } a = 1 \underbrace{9 \dots 9}_{m} + 1; \text{ где } m - \text{целое неотриц.}$$

Среди 5 поспед. чисел не может быть
двух чисел с $S=2$ одного вида,
иначе они отличаются больше, чем
на 100.

Предположим, что в некотором ряду
есть число a_1 вида $a_1 = 10^k + 1$, а
также число a_2 вида $a_2 = 1 \underbrace{9 \dots 9}_{m}$.

$k \neq m$, иначе числа отличаются
больше, чем на ~~100~~ 10

Т.к. числа a_1 и a_2 - среди 5-ти
поспед. нат. чисел $\Rightarrow |a_1 - a_2| \leq 4$

$$|10^k + 1 - 1 \underbrace{9 \dots 9}_m| \leq 4$$

$$|10^k - 10^k - \underbrace{9 \dots 9}_k| \leq 4 \quad M-09-05$$

$$|\underbrace{9 \dots 9}_k| \leq 4$$

Т.к. k - по условию $\in [1; +\infty)$

$\Downarrow$

Получаем противоречие.

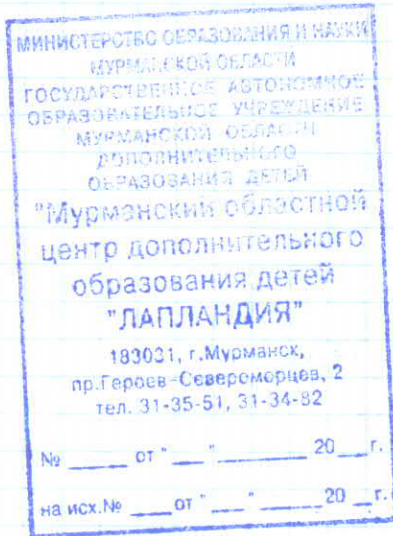
Среди 5-ти послед. чисел не может быть двух с $S=2 \Rightarrow$ все числа ряда не могут быть интересными $\Rightarrow$ интересных чисел не больше 4.

Среди 5-ти послед. наиб. чисел может быть 4 интересных:

199 200 201 202 203

$$\left. \begin{array}{l} S_{199} = 19 \\ S_{200} = 2 \\ S_{201} = 3 \\ S_{203} = 5 \end{array} \right\} \text{ все остальные.}$$

Ответ: наиб. кол-во интересных среди пяти послед. наиб. чисел = 4.



M2-09-04

Задача 9.7.

Докажем вспомогательное утверждение:

$$(c-d)^2 \geq 0$$

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geq cd$$

5	6	7	8
0	7	6+1	0

По условию $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ | 2

$$\Rightarrow c^2+d^2=4-a^2-b^2$$

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geq cd$$

$$cd \leq \frac{4-a^2-b^2}{2}$$

$$(2+a)(2+b) = 4+2a+2b+ab$$

Если $(2+a)(2+b) \geq \frac{4-a^2-b^2}{2}$, то

$$(2+a)(2+b) \geq cd$$

ЭТО НЕ ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ,

Предположим, что $(2+a)(2+b) \geq \frac{4-a^2-b^2}{2}$ **А**

$$(4+2a+2b+ab) \geq \frac{4-a^2-b^2}{2}$$

ТРЕБУЕТСЯ ДОКА-

$$8+4a+4b+2ab-4+a^2+b^2 \geq 0$$

ЗАТЬ.

$$a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 2 \cdot b \cdot 2 + 2 \cdot a \cdot 2 \geq 0$$

$$(a+b+2)^2 \geq 0 \text{ - это всегда верно}$$

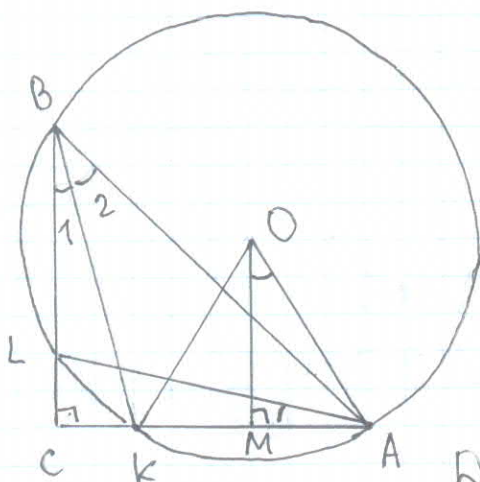


$$(2+a)(2+b) \geq \frac{4-a^2-b^2}{2} \text{ что и требовалось}$$

Равенство достигается, если

$$a=b=c=d=-1. \text{ — НЕ ТОЛЬКО!}$$

Задача 9.6.



Дано: н/у $\triangle ABC$;

$\angle C = 90^\circ$; BK — медиана

с вершины B; опр. O

описана вокруг $\triangle AKB$;

L — т. пересеч. опр. с BC

Д-ть: $BC + CL = AB$

Доказательство:

1. Соединим точки K и A с центром окружности O.

Из O проведем серединный перпендикуляр к хорде KA, точку пересеч. обозначим M

2. $\triangle OKA$ - р/б ($OK = OA$ - радиусы); OM - ср. $\perp$ $\Rightarrow$

OM - биссектриса $\angle KOA$;

$$\angle MOA = \frac{\angle KOA}{2}$$

$$\angle KOA = \overset{\sim}{\angle} KA, \text{ как центральный } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MOA = \frac{\overset{\sim}{\angle} KA}{2}$$

$$3. \angle 2 = \frac{\overset{\sim}{\angle} KA}{2}, \text{ как внешний опирающийся на дугу } AK$$

$$\begin{aligned} \angle 2 = \angle 1, \text{ т.к. } BK - \text{биссектриса} & \Rightarrow \angle 1 = \angle MOA \\ \angle 2 = \frac{\overset{\sim}{\angle} KA}{2} & \\ \angle MOA = \frac{\overset{\sim}{\angle} KA}{2} & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned}$$

$$4. \angle 1 = \angle MOA$$

$$\begin{aligned} \angle C = 90^\circ - \text{по условию} & \Rightarrow \triangle MOA \sim \triangle CBK \\ \angle OMA = 90^\circ - \text{по теор.} & \text{по двум углам.} \end{aligned}$$

В подобных $\triangle$ все соответств. элементы

$$\text{пропорц. } \Rightarrow \frac{CB}{MO} = \frac{CK}{MA} \Rightarrow \frac{CB}{MO} = \frac{CK \cdot 2}{KA}$$

$$(\angle MA = \frac{\overset{\sim}{\angle} KA}{2}, \text{ т.к. } OM - \text{ср. } \perp)$$

$$2OM = \frac{CB \cdot KA}{CK}$$

По свойству биссектрисы: $\frac{BC}{CK} = \frac{BA}{KA}$

$$BA = \frac{CB \cdot KA}{CK}$$

$$\Downarrow$$

$$BA = 2OM$$

5. $\triangle OMA$ и $\triangle ACL$ подобны по двум углам ($\angle OMA = \angle C$; $\angle MOA = \angle LAC$, как ~~внешние~~ ~~внутренние~~ ~~на одной прямой~~ ~~м.к.~~ ~~оба~~ ~~равны~~ $\frac{\angle K}{2} = \frac{\angle A}{2}$)

$$\Downarrow$$

$$\frac{OM}{CA} = \frac{KA}{2CL}$$

$$CA \cdot KA = OM \cdot 2CL$$

$\triangle CBK$ и $\triangle CAL$ подобны по двум углам ($\angle C$ общий; $\angle 1 = \angle LAC$ как ~~внешние~~ ~~внутренние~~ ~~на одной прямой~~)

$$\Downarrow$$

$$\frac{CK}{CL} = \frac{CB}{CA}$$

$$CK \cdot CA = CL \cdot CB$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АДМИНИСТРАТИВНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
163031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-52
№ _____ от "____" _____ 20__ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

$$6. CA \cdot KA = \underbrace{OM}_{AB} \cdot 2 \cdot CL$$

$$CK \cdot CA = CL \cdot CB$$

$$AB \cdot CL = CA \cdot KA$$

$$CB \cdot CL = CA \cdot CK$$

$$CL(AB + CB) = CA(KA + CK)$$

$$CL(AB + CB) = CA^2$$

$$CL(AB + CB) = AB^2 - CB^2$$

(по теореме Пифагора)

$$CL(AB + CB) = (AB + CB)(AB - CB)$$

$$AB - CB = CL$$

$$AB = CB + CL$$

что и требовалось доказать